Die elektrische Feldstärke zwischen zwei gewölbten Elektroden

Unger, Franz

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 1, 1949,
S.116-120

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Die elektrische Feldstärke zwischen zwei gewölbten Elektroden

Von **Franz Unger**

Mit 4 Abbildungen

An approximative method is given to find the strength of the electric field in a given point between two electrodes with curved surfaces. Two cylindrical surfaces standing in a rectangular angle to each other are placed at the electric field line touching the given point. Their intersections with the surfaces of the electrodes are near this line equipotential lines and it is possible to place a square net (following Lehmann) between the corresponding intersections of both electrodes. This results to a field tube of rectangular cross section enveloping this point.

In der Elektrotechnik besteht oft die Notwendigkeit, in einer Kondensatoranordnung nachzuprüfen, ob die elektrische Durchbruchsfeldstärke des Dielektrikums an keiner Stelle überschritten wird. Für eine Anzahl Kondensatorformen hat man exakte mathematische Lösungen dieser Aufgabe gefunden. Es gibt jedoch zahlreiche Elektrodenformen und -anordnungen, deren Felder nur näherungsweise bestimmt werden können. Ein sehr einfaches und genaues Verfahren ist das Lehmannsche Quadratverfahren [1]), das aber nur für Zylinder mit parallelen Achsen verwendbar ist. Kuhlmann [2]) und Bollinger [3]) haben Verfahren angegeben, die zur Berechnung symmetrischer Elektrodenformen, wie bei Stütz- und Hängeisolatoren, gut verwendbar sind. Es wird hier ein Verfahren entwickelt, nach dem man näherungsweise die Feldstärke in einem beliebigen Punkte des Raumes zwischen zwei beliebig gestalteten Elektroden bestimmen kann.

Man denke sich zwei Elektroden, die gegeneinander Spannung führen, so daß zwischen ihnen ein elektrisches Feld besteht. Da die Elektrodenoberflächen Äquipotentialflächen sind, muß jede Feldlinie diese Flächen senkrecht treffen.

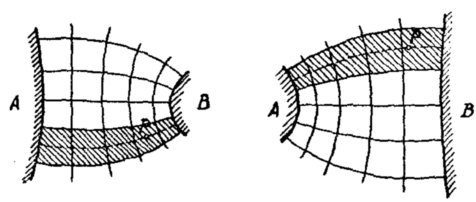

Abb. 1. Feld- und Äquipotentiallinien zwischen den Elektroden A und B in zwei Ebenen abgewickelt

Soll in einem beliebigen Punkt P (Abb. 1) die Feldstärke bestimmt werden, so muß man die Feldlinie kennen, die durch ihn hindurch geht. Sie ist im allgemeinen eine Raumkurve. Man sucht zunächst festzustellen, welche Ebene sich dieser Kurve am besten anschmiegt und legt durch die Feldlinie eine Zylinderfläche, deren Erzeugende parallel zu dieser Ebene verlaufen. Meist genügt es schon, diese Ebene als geometrischen Ort der Feldkurve zu behandeln. Diese

Zylinderfläche (bzw. Ebene) schneidet die beiden Elektrodenflächen in zwei Schnitten. In Abb. 1a ist diese Zylinderfläche mit den beiden Schnitten in die Bildebene abgewickelt dargestellt.

Eine zweite Zylinderfläche in unendlich kleinem Abstande von der beschriebenen schneidet die beiden Elektrodenflächen in Schnitten, deren Form von der erstbeschriebenen nur unendlich wenig abweicht. Abgewickelt decken sich die Schnitte vollkommen mit denen der Bildebene in Abb. 1a. Man kann daher diese Flächenabschnitte auf den beiden Elektroden zwischen diesen beiden Ebenen als Zylinderflächen mit parallelen Erzeugenden ansehen. Für diesen Fall kann das Lehmannsche Verfahren angewendet werden. Das geschieht so, daß man Feld- und Niveaulinien in Abb. 1a so verteilt, daß ein Netz aus „Quadraten" entsteht. Unter „Quadrat" muß man in diesem Falle ein viereckiges Gebilde verstehen, begrenzt von zwei Niveauflächen und zwei Feldlinien, dessen vier Ecken rechte Winkel bilden, und dessen feinere Unterteilung durch weitere Niveau- und Feldlinien im Grenzwert zu geometrischen Quadraten führt.

Durch diese Maßnahme wird der zwischen den beiden parallelen Ebenen eingegrenzte Teil des Feldes in einzelne Feldröhren mit rechteckigen Querschnitten (deren Höhe unendlich klein ist), und deren Kanten von benachbarten Feldlinien gebildet werden, aufgeteilt. Durch die Niveauflächen werden alle diese Feldröhren in die gleiche Anzahl Teile geteilt, die man im Grenzfalle als Prismen betrachten kann, und deren Leitfähigkeit gleich groß ist. In jeder Feldröhre ist also die gleiche Anzahl Teilprismen in Reihe geschaltet, ihr Widerstand ist proportional der Anzahl dieser Teilprismen. Die Widerstände und Leitfähigkeiten sämtlicher Feldröhren sind also gleich.

Legt man nunmehr durch die betrachtete Feldlinie (die durch den Punkt P hindurchgeht) eine zweite Zylinderfläche, deren Erzeugende zur oben beschriebenen Zylinderfläche (Ebene) senkrecht stehen, so schneidet sie die Elektrodenflächen ebenfalls in zwei Schnitten. In Abb. 1b ist diese Zylinderfläche ebenfalls in die Bildebene abgewickelt dargestellt. Man wiederholt nun das Verfahren wie in Abb. 1a und erhält ein neues Lehmannsches Quadratnetz. Dabei muß das Feld durch die gleiche Anzahl Niveauflächen geteilt werden wie in Abb. 1a. Die Anzahl der in einer Feldröhre in Reihe geschalteten Quadrate ist dann dieselbe wie in Abb. 1a und damit auch der Widerstand jeder Feldröhre.

In beiden Bildebenen liegt der Punkt P auf einer gestrichelten, entsprechend der Bildebene abgewickelten Feldkurve. Diese beiden Feldkurven müssen in den beiden Bildebenen genau gleich lang sein, der Weg von einer Elektrodenoberfläche über die Feldlinie zu P muß in Abb. 1a und 1b ebenfalls gleich lang sein. Ist also die Lage des Punktes in der einen Bildebene (1a) festgelegt, so ist damit seine Lage in der zweiten Bildebene (1b) genau bestimmt. Man kann sich daher den Punkt P in einer Feldröhre liegend vorstellen, die rechteckige Querschnitte hat. Sie sei in Abb. 2a dargestellt. Die einzelnen Querschnitte dieser Röhre liegen in Niveauflächen. Sie sind also im allgemeinen nicht parallel. Die Röhre ergibt sich aus Abb. 1, indem man die Breiten der schraffierten Feldfläche von 1a als Breiten, die Breiten der schraffierten Feldfläche von 1b als Höhen betrachtet.

Zur Auswertung der Feldröhre muß man sie entsprechend einer der beiden Quadratteilungen, beispielsweise der von Abb. 1a, in einzelne Teilstücke zerschneiden, man muß also eine der beiden Quadratteilungen beibehalten. Die Kanten eines den Punkt P umschließenden *Teil*stückes werden also zunächst durch die Seiten des Quadrats gebildet, das *dies*en Punkt in der Bildebene 1a umschließt. Man greift nun in Abb. 1a auf der durch P hindurchgehenden Feldlinie die Abstände der beiden zur Feldlinie senkrechten Quadratseiten (Niveaulinien) von P ab und trägt sie in Abb. 1b auf der dortigen durch P hindurchgehenden Feldlinie von P nach beiden Richtungen auf. Durch diese beiden Punkte in 1b legt man Niveaulinien, die dann in dieser Bildebene die Kanten des Teilstückes der Feldröhre bilden.

In Abb. 2a sind die Begrenzungsflächen der Feldröhre entsprechend den Feldflächen von Abb. 1a und 1b mit ihren Quadratteilungen dargestellt. Mit δ_x sind die Seitenabmessungen eines in der Bildebene 1a liegenden Quadrats bezeichnet.

Um die beiden Begrenzungsquerschnitte des Röhrenteilstückes zu erhalten, wird in der oben beschriebenen Weise vorgegangen, so daß die beiden ge-

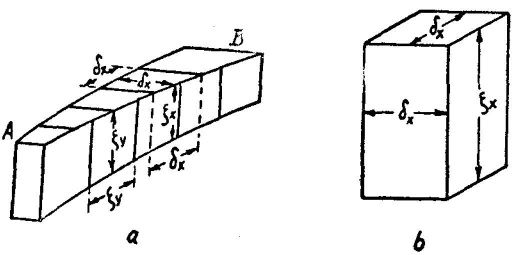

Abb. 2. Abgrenzung einer Teilfeldröhre und ihre Reduktion auf ein Prisma mit den Seitenlängen δ_x, δ_x, ζ_x.

strichelten Geraden in Abb. 2a in der senkrechten Begrenzungsfläche der Röhre Kanten der beiden Querschnittsflächen darstellen.

Bei genügend feiner Unterteilung der Röhre in Teilstücke kann jedes einzelne Teilstück als Prisma mit den Längenabmessungen (in Richtung der Feldlinie) δ_x und den Querschnittsabmessungen (Niveaufläche) δ_x und ζ_x behandelt werden. Die feinunterteilte Feldröhre besteht daher aus einzelnen Teilstücken, die zwar bei genügend feiner Unterteilung als Prismen angesehen werden können, deren Leitfähigkeiten jedoch verschieden sind.

Ein solches Prisma ist in Abb. 2b dargestellt. Es hat in den waagerechten Ebenen die Seitenlängen δ_x, in den senkrechten Ebenen die Seitenlängen ζ_x. Die elektrischen Ladungen auf den Endflächen A und B der Feldröhre Abb. 2a seien mit $+q$ bzw. $-q$ bezeichnet. Die Influenzkonstante sei ε_0, die Dielektrizitätskonstante ε. Die Querschnittsfläche F_x des Prismas Abb. 2b ist dann

$$F_x = \delta_x \zeta_x. \tag{1}$$

Dann ergibt sich die Teilspannung Δu_x an den beiden Niveauflächen des Prismas mit

$$\Delta u_x = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{\delta_x}{F_x} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{1}{\zeta_x}. \tag{2}$$

Die gesamte Spannung u zwischen den Flächen A und B erhält man demnach als Summe der Teilspannungen der einzelnen Prismen, also

$$u = \sum_A^B \Delta u_x = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon} \sum_A^B \frac{1}{\zeta_x}. \tag{3}$$

Aus dieser Gleichung kann man $q/\varepsilon_0 \varepsilon$ bestimmen und erhält

$$\frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{u}{\sum_A^B \frac{1}{\zeta_x}}. \tag{4}$$

Die Spannung Δu_n am Teilstück n einer Feldröhre ergibt sich nach den Gleichungen (2) und (4) als

$$\Delta u_n = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{\delta_n}{F_n} = \frac{u}{\zeta_n \sum_A^B \frac{1}{\zeta_x}}. \tag{5}$$

Die Feldstärke $\mathfrak{E}_n$ in diesem Teilstück wird dann:

$$\mathfrak{E}_n = \lim \frac{\Delta u_n}{\delta_n} = \frac{u}{\lim \delta_n \zeta_n \sum_A^B \frac{1}{\zeta_x}}. \tag{6}$$

Die größte Feldstärke $\mathfrak{E}_0$ ergibt sich an der engsten Stelle der kürzesten Feldröhre mit

$$\mathfrak{E}_0 = \frac{u}{\lim \delta_0 \zeta_0 \sum_A^B \frac{1}{\zeta_x}}. \tag{7}$$

Das Verfahren wird um so genauer, je feiner die Unterteilung, je enger also die den Punkt P umhüllende Feldröhre ist. Ist die betreffende Feldlinie eine Raumkurve, so gehört einige Übung dazu, richtig zu beurteilen, welche Ebene sich dieser Kurve am meisten anschmiegt.

In den meisten Fällen wird nur die größte zwischen den Elektroden auftretende Feldstärke gesucht, die meistens in der kürzesten Feldlinie liegt. Die kürzeste Feldlinie weicht nur wenig von einer Geraden ab, in den meisten Fällen ist sie genau eine Gerade. In diesem Falle genügt es, durch diese Gerade zwei aufeinander senkrechte Ebenen zu legen, deren Schnitte mit den Elektrodenoberflächen ebene Kurven ergeben. Abb. 1 stellt dann Aufriß und Grundriß durch die Elektrodenoberflächen dar. Die Quadratnetze nach Lehmann geben in der Nähe der kürzesten Feldlinie den wirklichen Verlauf der benachbarten Feldlinien mit ausreichender Genauigkeit wieder. Die kürzeste Feldlinie ist also mit ausreichender Genauigkeit bestimmt und man erhält die größte Feldstärke nach Gleichung (7) für die kleinsten Werte von $\delta_0 \zeta_0$.

Je feiner die Unterteilung, d. h. je mehr Niveauflächen man zwischen den Elektrodenoberflächen einzeichnet, um so genauer kann $\sum_A^B \frac{1}{\zeta_x}$ bestimmt werden, um so kleiner werden δ_0 und ζ_0, und um so genauer ergibt sich die größte Feldstärke.

Zusammenfassung

Zur Bestimmung der elektrischen Feldstärke in einem beliebigen Punkte des Raunes zwischen zwei beliebig gewölbten Elektroden wird ein Näherungsverfahren entwickelt. Durch die den Punkt berührende Feldlinie werden zwei aufeinander senkrecht stehende Zylinderflächen gelegt. Ihre Schnitte mit den Elektrodenflächen sind, in der Nähe dieser Feldlinie, Äquipotentiallinien, zwischen denen man nach Lehmann ein Quadratnetz zeichnen kann. Damit ist die Auswertung einer den Punkt umhüllenden Feldröhre rechteckigen Querschnitts möglich.

Literatur

[1]) Lehmann, Graph. Methode zur Bestimmung des Kraftlinienverlaufs. ETZ. 1909, S. 995.
[2]) Kuhlmann, Hochspannungsisolatoren. A. f. E. III, 1915, S. 203.
[3]) Bollinger, Grundlagen zur Konstruktion eines neuen Durchführungsisolators. A. f. E. IV, 1916, S. 354.